BÖLÜM 3

3.1. GRUPLAR

Tanım 3.1.1. G boştan farklı bir küme ve $*$, G de bir ikili (iç) işlem olsun. Eğer $*$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa $(G,*)$ cebirsel yapısına **bir grup** denir.

***G*1)** $*$ işleminin G de **birleşme özelliği** vardır. Yani $\forall a,b,c \in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$ olur.

***G*2)** G nin $*$ işlemine göre **birim (etkisiz) elemanı** vardır. Yani öyle $e \in G$ elemanı vardır ki $\forall a \in G$ için $a*e=e*a=a$ olur.

***G*3)** G deki her elemanın $*$ işlemine göre tersi vardır. Yani $\forall a \in G$ için $a*x=x*a=e$ olacak şekilde $\exists x \in G$ vardır.

Teorem 3.1.2. $*$, A kümesinde birleşme özelliğine sahip bir iç işlem ve A bu işleme göre bir e birim elemanına sahip olsun. Bu takdirde

- **(i)** bir $a \in A$ elemanının $*$ işlemine göre tersi varsa tektir.
- **(ii)** bir $a \in A$ elemanının $*$ işlemine göre tersi varsa a^{-1} elemanının da tersi var ve $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$ olur.

(iii) a ve b elemanlarının $*$ işlemine göre tersleri varsa $a*b$ elemanının da $*$ işlemine göre tersi var ve $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$ olur.

İspat: ÖDEV.

Not: İlgili teoremlerden bir grupta birim eleman ve bir elemanın tersinin teklikle belirli olduğu anlaşılır.

Tanım 3.1.3. $(G,*)$ bir grup olsun. Eğer $\forall a,b\in G$ için $a*b=b*a$ ise bu gruba bir **değişmeli grup veya Abel Grubu** denir.

ÖRNEK: $\mathbb{Z}$ Tamsayılar Kümesi bildiğimiz + işlemine göre bir değişmeli gruptur. $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ ve $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ cebirsel yapıları birer değişmeli gruptur.

Tanım 3.1.4. $(G,*)$ bir grup ve G sonlu elemanlı ise bu gruba bir **sonlu grup** denir, G nin eleman sayısına da **grubun mertebesi** denir ve genellikle $\circ(G)$ veya $|G|$ ile gösterilir.

Not: Bir G grubunda işlemin sembolü özel olarak belirtilmemişse bazen bu sembol $\cdot$ ile gösterilir. Grubun birim elemanı da genellikle e_G veya sadece e ile gösterilir. Eğer G bir değişmeli grup ise burada işlemin sembolü bazen + ile de gösterilir. Bu durumda $\forall a \in G$ için a elemanının tersi genellikle $-a$ ile gösterilir, grubun + işlemine göre birim elemanı da bazen 0_G veya sadece 0 ile gösterilir.

Teorem 3.1.5. G bir grup olsun. Bu durumda $a,b,c \in G$ olmak üzere

(1) $ab=ac$ ise $b=c$ (soldan kısaltma özelliği) ve

(2) $ac=bc$ ise $a=b$ (sağdan kısaltma özelliği)

olan kısaltma özellikleri sağlanır.

İspat: (1) $ab=ac$ olsun. G bir grup olduğundan a elemanının G de a^{-1} tersi vardır. $ab = ac$ olduğundan $a^{-1}ab = a^{-1}ac$ olup $eb = ec$ ve buradan da $b = c$ elde edilir.
(2) ÖDEV.

Teorem 3.1.6. G bir grup olsun. Bu durumda $\forall a,b \in G$ için

(i) $ax = b$ olacak şekilde $\exists x \in G$ var ve tektir.

(ii) $ya = b$ olacak şekilde teklikle belirli bir $y \in G$ vardır.

İspat: Herhangi $a,b \in G$ alalım.

(i) $x = a^{-1}b$ dersek G bir grup olduğundan $x \in G$ ve $ax = aa^{-1}b = eb = b$ olur. Şimdi bu elemanın tekliğini gösterelim. $ac = b$ olan herhangi $c \in G$ alalım. $c = x$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $ax = b$ ve $ac = b$ olduğundan $ac = ax$ olup kısaltma özelliğinden $c = x$ olur.

(ii) $y = ba^{-1}$ dersek G bir grup olduğundan $y \in G$ ve $ya = ba^{-1}a = be = b$ olur. Şimdi bu elemanın tekliğini gösterelim. $da = b$ olan herhangi $d \in G$ alalım. $d = y$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $da = b$ ve $ya = b$ olduğundan $da = ya$ olup kısaltma özelliğinden $d = y$ olur.

Tanım 3.1.7. G bir grup, $a \in G$ ve e, G nin birim elemanı olsun. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tane}} & , \ n > 0 \text{ ise} \\ e & , \ n = 0 \text{ ise} \\ \underbrace{a^{-1}a^{-1}\ldots a^{-1}}_{-n \text{ tane}} & , \ n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu a^n elemanına ***a* elemanının *n*. kuvveti** denir.

ÖRNEK: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $a^5 = aaaaa$, $a^{-5} = a^{-1}a^{-1}a^{-1}a^{-1}a^{-1}$ ve $a^0 = e$ olur.

Teorem 3.1.8. G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. Bu takdirde $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$ dir.

(ii) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ dir.

(iii) G değişmeli ise $\left(ab\right)^m = a^m b^m$ olur.

İspat: Herhangi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ alalım.

(i) Tanımdan

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ tane}} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tane}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ tane}} = a^{m+n}$$

olup istenen elde edilir.

(ii) Tanımdan ve (i) şıkkından

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n \text{ tane}} = a^{m+m} \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n-2 \text{ tane}} = \ldots = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ tane}}} = a^{mn}$$

olup istenen elde edilir.

(iii) G değişmeli olsun. Bu durumda tanımdan

$$(ab)^m = \underbrace{(ab)(ab)...(ab)}_{m \text{ tane}} = (aa)(bb)\underbrace{(ab)...(ab)}_{m-2 \text{ tane}} = (aaa)(bbb)\underbrace{(ab)...(ab)}_{m-3 \text{ tane}} = ... =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b}_{m \text{ tane}} = a^m b^m$$

olup istenen elde edilir.

Sonuç 3.1.9. Yukarıdaki teorem $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ için de sağlanır. Yani G bir grup ve $a, b \in G$ olmak üzere $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ için

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$ dir.

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ dir.

(iii) G değişmeli ise $(ab)^m = a^m b^m$ olur.

Not: Bir G değişmeli grubundaki işlem + sembolü ile gösterilmişse G nin bir a elemanının n. kuvveti yerine genellikle kat tanımlanır.

Tanım 3.1.10. (G, +) bir değişmeli grup ve $a \in G$ olsun. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$na = \begin{cases} \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ tane}} & , \quad n>0 \text{ ise} \\ 0_G & , \quad n=0 \text{ ise} \\ \underbrace{(-a)+(-a)+\ldots+(-a)}_{-n \text{ tane}}, & n<0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu na elemanına ***a* elemanının *n* katı** denir.

Teorem 3.1.11. $(G, +)$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ için

(i) $ma + na = (m+n)a$ olur.

(ii) $m(na) = (mn)a$ olur.

(iii) $n(a+b) = na + nb$ olur.

Teorem 3.1.12. G boştan farklı bir küme ve $*$, G de bir iç işlem olsun. $*$ işlemi $G1$ birleşme aksiyomu ile aşağıdaki koşulları sağlasın.

A) Öyle $e \in G$ vardır ki $\forall a \in G$ için $e * a = a$ olur (sol birim).

B) $\forall a \in G$ için $a' * a = e$ olacak şekilde $\exists a' \in G$ vardır (a elemanının sol tersi).

Bu durumda $(G, *)$ bir gruptur.

Teorem 3.1.13. G boştan farklı bir küme ve $*$, G de bir iç işlem olsun. $*$ işlemi $G1$ birleşme aksiyomu ile aşağıdaki koşulları sağlasın.

A) Öyle $e \in G$ vardır ki $\forall a \in G$ için $a * e = a$ olur (sağ birim).

B) $\forall a \in G$ için $a * a' = e$ olacak şekilde $\exists a' \in G$ vardır (a elemanının sağ tersi).

Bu durumda $(G, *)$ bir gruptur.

Teorem 3.1.14. G boştan farklı bir küme, $*$, G de birleşme özelliğine sahip bir iç işlem ve $\forall a, b \in G$ için $a * x = b$ ve $y * a = b$ olacak şekilde $\exists x, y \in G$ bulunabilsin. Bu durumda $(G, *)$ bir gruptur.

İspat: $G \neq \varnothing$ olduğundan $\exists a \in G$ vardır. $a \in G$ olduğundan hipotezden $e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. Herhangi $b \in G$ alalım. $a, b \in G$ olduğundan hipotezden $a * x = b$ olacak şekilde $\exists x \in G$ vardır. Burada $*$ işleminin G de birleşme özelliğinden $e * b = e * (a * x) = (e * a) * x = a * x = b$ olur. Yani $\forall b \in G$ için $e * b = b$ olup e elemanı G nin $*$ işlemine göre sol birim elemanı olur.

Herhangi $a \in G$ alalım. $a, e \in G$ olduğundan hipotezden $a' * a = e$ olacak şekilde $\exists a' \in G$ vardır. $a' * a = e$ olduğundan a' elemanı a nın G de $*$ işlemine göre sol tersi olur. Yani G deki her elemanın G de $*$ işlemine göre sol tersi vardır.

Böylece ilgili teoremden $(G,*)$ bir grup olup istenen elde edilir.

Teorem 3.1.15. G boştan farklı sonlu bir küme ve $*$, G de bir iç işlem olsun. $*$ işleminin $G1$ birleşme ve sağdan soldan kısaltma özellikleri varsa $(G,*)$ bir gruptur.

İspat: $*$ işleminin G de $G1$ birleşme ve sağdan soldan kısaltma özelliklerinin varlığını kabul edelim. Herhangi $a,b\in G$ alalım.

$$f:G\to G, x\to f(x)=a*x$$

dönüşümünü tanımlayalım. f nin bir fonksiyon olduğu açıktır. $f(x_1)=f(x_2)$ olan herhangi $x_1,x_2\in G$ alalım. $f(x_1)=f(x_2)$ olduğundan $a*x_1=a*x_2$ olup $*$ işleminin soldan kısaltma özelliğinden $x_1=x_2$ olur. O halde f birebir olur. Burada G sonlu elemanlı olduğundan Soyut Matematik Dersindeki ilgili teoremden f aynı zamanda örtendir. f örten ve $b\in G$ olduğundan $f(x)=b$ olacak şekilde $\exists x\in G$ vardır. $f(x)=b$ olduğundan $a*x=b$ olur. Benzer şekilde

$$g:G\to G, y\to g(y)=y*a$$

dönüşümünü tanımlayarak $y*a=b$ olacak şekilde $\exists y\in G$ elemanının varlığı gösterilebilir (ÖDEV). O halde bir önceki teoremden $(G,*)$ bir grup olup istenen elde edilir.

Teorem 3.1.16. $(G_1,\vartriangle)$ ve $(G_2,\square)$ iki grup olsun. $G_1\times G_2$ kümesi $\forall(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in G_1\times G_2$ için $(a_1,b_1)*(a_2,b_2)=(a_1\vartriangle a_2,b_1\square b_2)$ ile tanımlı $*$ işlemine göre bir gruptur. Bu gruba G_1 ve G_2 gruplarının **direkt çarpımı** denir.

İspat: $*$ işleminin $G_1\times G_2$de bir iç işlem olduğu açıktır.

$(G_1,\vartriangle)$ ve $(G_2,\square)$ birer grup olduğundan $*$ işleminin tanımından $\forall(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\in G_1\times G_2$ için

$$(a_1,b_1)*\left[(a_2,b_2)*(a_3,b_3)\right]=(a_1,b_1)*(a_2\vartriangle a_3,b_2\square b_3)=\big(a_1\vartriangle(a_2\vartriangle a_3),b_1\square(b_2\square b_3)\big)=$$

$$=\big((a_1\vartriangle a_2)\vartriangle a_3,(b_1\square b_2)\square b_3\big)=(a_1\vartriangle a_2,b_1\square b_2)*(a_3,b_3)=\left[(a_1,b_1)*(a_2,b_2)\right]*(a_3,b_3)$$

olup $*$ işleminin $G_1\times G_2$de birleşme özelliği vardır.

G_1in $\vartriangle$ işlemine göre birim elemanı e_1 ve G_2nin $\square$ işlemine göre birim elemanı e_2 olsun. $G_1\times G_2$nin (e_1,e_2) elemanını alalım. Burada $\forall(a,b)\in G_1\times G_2$ için $(a,b)*(e_1,e_2)=(a\vartriangle e_1,b\square e_2)=(a,b)$ ve $(e_1,e_2)*(a,b)=(e_1\vartriangle a,e_2\square b)=(a,b)$ olup (e_1,e_2) elemanı $G_1\times G_2$nin $*$ işlemine göre birim elemanı olur.

Herhangi $(a,b) \in G_1 \times G_2$ alalım. $(G_1,\vartriangle)$ ve $(G_2,\square)$ birer grup olduğundan $a \vartriangle x = x \vartriangle a = e_1$ ve $b \square y = y \square b = e_2$ olacak şekilde $\exists x \in G_1$ ve $\exists y \in G_2$ vardır. $G_1 \times G_2$ nin (x,y) elemanını alalım. Burada $(a,b) * (x,y) = (a \vartriangle x, b \square y) = (e_1, e_2)$ ve $(x,y) * (a,b) = (x \vartriangle a, y \square b) = (e_1, e_2)$ olup (x,y) elemanı (a,b)nin $G_1 \times G_2$de $*$ işlemine göre tersi olur. Yani $G_1 \times G_2$deki her elemanın $G_1 \times G_2$de $*$ işlemine göre tersi vardır.

Böylece $G_1 \times G_2$ kümesi $*$ işlemine göre bir grup olup istenen elde edilir.

3.2. ALT GRUPLAR:

Tanım 3.2.1. *G* bir grup ve *H*, *G* nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer *H*, *G* deki işleme göre kendi başına bir grup ise *H* ye *G* nin **bir alt grubu** denir ve genellikle $H < G$ ile ifade edilir.

Not: Her grup kendisinin bir alt grubudur. *G* bir grup ve *e*, *G* nin birim elemanı ise $\{e\} < G$ olur.

Tanım 3.2.2. G bir grup olsun. G nin varsa $\{e\}$ ve G den farklı bir alt grubuna **bir öz (has) alt grubu** denir.

ÖRNEK: $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ grubu $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ grubunun bir öz alt grubudur.

ÖRNEK: $G=\{-1,1,i,-i\}$ kümesi kompleks sayılarda bildiğimiz çarpma işlemine göre 4. mertebeden bir gruptur. $H=\{-1,1\}$ kümesi G nin 2. mertebeden bir öz alt grubudur.

Teorem 3.2.3. H, G nin bir alt grubu ise H nin birim elemanı ile G nin birim elemanı aynıdır.
İspat: $H<G$ olsun. H nin birim elemanına e_H ve G nin birim elemanına da e_G diyelim. $e_H=e_G$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. e_H, H nin birim elemanı olduğundan $e_He_H=e_H$ olur. e_G, G nin birim elemanı ve $e_H\in G$ olduğundan $e_He_G=e_H$ olur. $e_He_H=e_H$ ve $e_He_G=e_H$ olduğundan $e_He_H=e_He_G$ olup burada $e_H,e_G\in G$ ve G bir grup olduğundan kısaltma özelliğinden $e_H=e_G$ elde edilir.

Sonuç 3.2.4. $H<G$ ise $\forall a\in H$ için a elemanının H deki tersi ile G deki tersi aynıdır.

Teorem 3.2.5. G bir grup ve $\varnothing \neq H \subset G$ olsun. H nin bir alt grup olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\forall a, b \in H$ için $ab \in H$ ve

(ii) $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$

olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $H < G$ olsun. Bu durumda H, G deki işleme göre kendi başına bir grup olup teoremin ifadesindeki (i) ve (ii) koşulları sağlanır.

$(\Leftarrow)$ Teoremin ifadesindeki (i) ve (ii) koşulları sağlansın. (i) koşulundan G deki işlemin H de bir iç işlem olduğu anlaşılır.

$H \subset G$ olduğundan $\forall a, b, c \in H$ için $a, b, c \in G$ olup G deki işlemin birleşme özelliğinden $a(bc) = (ab)c$ olur. O halde G deki işlemin H de birleşme özelliği vardır.

$H \neq \varnothing$ olduğundan $\exists a \in H$ vardır. (ii) koşulundan $a^{-1} \in H$ olur. $a, a^{-1} \in H$ olduğundan (i) koşulundan $e = aa^{-1} \in H$ olur. Ayrıca $H \subset G$ olduğundan $\forall x \in H$ için $x \in G$ olup e, G nin birim elemanı olduğundan $xe = ex = x$ olur. O halde e, H nin G deki işleme göre birim elemanı olur.

Herhangi $a \in H$ alalım. (ii) koşulundan $a^{-1} \in H$ olur. Burada $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ ve e, H nin G deki işleme göre birim elemanı olduğundan a^{-1} elemanı a nın H de G deki işleme göre tersi olur. Yani H deki her elemanın G deki işleme göre tersi vardır.
Böylece H, G deki işleme göre kendi başına bir grup olup $H < G$ olur.

Teorem 3.2.6. G bir grup ve $\varnothing \neq H \subset G$ olsun. H nin bir alt grup olması için gerek ve yeter koşul $\forall a,b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $H < G$ olsun. Bu durumda H, G deki işleme göre kendi başına bir grup olup $\forall a,b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olduğu açıktır.

$(\Leftarrow)$ $\forall a,b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olsun. $H \neq \varnothing$ olduğundan $\exists a \in H$ vardır. $a \in H$ olduğundan hipotezden $e = aa^{-1} \in H$ olur. Yani G nin birim elemanı H nin bir elemanıdır. Herhangi $c \in H$ alalım. $e, c \in H$ olduğundan hipotezden $c^{-1} = ec^{-1} \in H$ olur. Yani H deki her elemanın G deki tersi yine H nin bir elemanıdır. Herhangi $x, y \in H$ alalım. $y \in H$ ve H deki her elemanın G deki tersi H nin bir elemanı olduğundan $y^{-1} \in H$ olur. $x, y^{-1} \in H$ olduğundan hipotezden $xy = x\left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$ olur. Yani $\forall x, y \in H$ için $xy \in H$ olup G deki işlem H de bir iç işlem olur. G deki işlemin H de birleşme özelliği de G den sağlanır. Böylece H, G deki işleme göre kendi başına bir grup olup $H < G$ olur.

Teorem 3.2.7. G bir grup ve $\varnothing \neq H \subset G$ olsun. H nin bir alt grup olması için gerek ve yeter koşul $\forall a,b \in H$ için $a^{-1}b \in H$ olmasıdır.

Teorem 3.2.8. G bir grup ve H, G nin boştan farklı sonlu elemanlı bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall a,b \in H$ için $ab \in H$ ise $H < G$ olur.

Teorem 3.2.9. Bir G grubunun birtakım alt gruplarının kesişimi de G nin bir alt grubudur.
İspat: $\{H_i\}_{i\in I}$, G nin alt gruplarının bir ailesi olsun. $\bigcap_{i\in I} H_i < G$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $\forall i \in I$ için $H_i < G$ olduğundan $e \in H_i$ olur. $\forall i \in I$ için $e \in H_i$ olduğundan $e \in \bigcap_{i\in I} H_i$ olup $\bigcap_{i\in I} H_i \neq \varnothing$ olur. Ayrıca $\bigcap_{i\in I} H_i \subset G$ olduğu da açıktır. Yani $\varnothing \neq \bigcap_{i\in I} H_i \subset G$ olur. Herhangi $a,b \in \bigcap_{i\in I} H_i$ alalım. $a,b \in \bigcap_{i\in I} H_i$ olduğundan $\forall i \in I$ için $a,b \in H_i$ olup

$H_i < G$ olduğundan $ab^{-1} \in H_i$ olur. $\forall i \in I$ için $ab^{-1} \in H_i$ olduğundan $ab^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$ olur. Yani $\forall a,b \in \bigcap_{i\in I} H_i$ için $ab^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$ olup ilgili teoremden $\bigcap_{i\in I} H_i < G$ olur.

Tanım 3.2.10. G bir grup, A ve B, G nin iki alt kümesi olsun. $AB = \{ab \mid a \in A \wedge b \in B\}$ kümesine ***A* kümesinin *B* kümesine çarpımı** denir. Özel olarak eğer $A = \{a\}$ şeklinde tek elemanlı ise $\{a\}B$ yerine genellikle *aB* yazılır, eğer $B = \{b\}$ şeklinde tek elemanlı ise $A\{b\}$ yerine genellikle *Ab* yazılır (hem *A*, hem de *B* tek elemanlı ise parantez kaldırılmaz, sadece bir tanesinde kaldırılabilir). Benzer tanım toplamsal grup için de yapılabilir.

Teorem 3.2.11. *G* bir grup, $H < G$ ve $K < G$ olsun. Bu durumda $HK < G$ olması için gerek ve yeter koşul $HK = KH$ olmasıdır.

SORU 1) *S* boştan farklı bir küme olmak üzere *S* kümesinde $*$ işlemi $\forall a,b \in S$ için $a * b = a$ ile tanımlansın. $*$ işleminin birleşmeli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $*$ işleminin S de bir iç işlem olduğu açıktır. Burada $*$ işleminin tanımından $\forall a,b,c \in S$ için $a*(b*c)=a$ ve $(a*b)*c=a*c=a$ olup $a*(b*c)=a=(a*b)*c$ olur. O halde $*$ işlemi birleşmeli olup istenen elde edilir.

SORU 2) $(G,\circ)$ bir grup olsun. G kümesinde $*$ işlemi $\forall a,b \in G$ için $a*b=b\circ a$ olarak tanımlansın. $(G,*)$ cebirsel yapısının bir grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $*$ işleminin G de bir iç işlem olduğu açıktır.

$*$ işleminin tanımı ve $\circ$ işleminin birleşme özelliğinden $\forall a,b,c \in G$ için $a*(b*c)=a*(c\circ b)=(c\circ b)\circ a=c\circ(b\circ a)=(b\circ a)*c=(a*b)*c$ olup $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır.

G nin $\circ$ işlemine göre birim elemanı e olsun. Bu durumda $*$ işleminin tanımından $\forall a \in G$ için $a*e=e\circ a=a$ ve $e*a=a\circ e=a$ olup e elemanı G nin $*$ işlemine göre de birim elemanı olur.

Herhangi $a \in G$ alalım. $(G,\circ)$ bir grup olduğundan a elemanının G de $\circ$ işlemine göre tersi vardır. a elemanının G de $\circ$ işlemine göre tersi x olsun. $*$ işleminin tanımından $a*x=x\circ a=e$ ve $x*a=a\circ x=e$ olup x elemanı a nın $*$ işlemine göre de tersi olur. Yani G

deki her elemanın G de $*$ işlemine göre tersi vardır.Böylece $(G,*)$ cebirsel yapısı bir grup olup istenen elde edilir.

SORU 3) G bir grup $a,b \in G$ ve $a^3b = ba^3$ olsun. Eğer $a^5 = e$ ise $ab = ba$ olduğunu gösteriniz.
Çözüm: $a^5 = e$ olsun. Bu durumda $a^6 = a$ olup $a^3b = ba^3$ olduğundan $ab = a^6b = a^3a^3b = a^3ba^3 = ba^3a^3 = ba^6 = ba$ olur ki bu da istenendir.

SORU 4) $m,n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $m \times n$ tipindeki reel matrisler kümesinin matrislerde toplama işlemine göre bir değişmeli grup olduğunu gösteriniz.
Çözüm: ÖDEV.

SORU 5) G bir değişmeli grup ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $G_n = \left\{a \in G \,\middle|\, \exists x \in G \text{ için } a = x^n\right\}$ kümesinin G nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.
Çözüm: $e = e^n$ olduğundan $e \in G_n$ olup $G_n \neq \varnothing$ olur. Ayrıca $G_n \subset G$ olduğu da açıktır. Yani $\varnothing \neq G_n \subset G$ olur. Herhangi $a,b \in G_n$ alalım. $a,b \in G_n$ olduğundan $a = x^n$ ve $b = y^n$ olacak

şekilde $\exists x, y \in G$ vardır. $x, y \in G$ ve G bir grup olduğundan $xy^{-1} \in G$ olur. Burada G değişmeli olduğundan ilgili teoremden $ab^{-1} = x^n \left(y^n\right)^{-1} = x^n y^{-n} = x^n \left(y^{-1}\right)^n = \left(xy^{-1}\right)^n$ olup $xy^{-1} \in G$ olduğundan G_n nin tanımından $ab^{-1} \in G_n$ olur. Yani $\forall a, b \in G_n$ için $ab^{-1} \in G_n$ olup ilgili teoremden $G_n < G$ olur.